

А. В. Ануфриева, К. Б. Игудесман, Д. Н. Тумаков

ДИФРАКЦИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА СЛОЕ С ФРАКТАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ

Аннотация. Одномерная задача дифракции упругой волны на слое с фрактальным распределением плотности сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с линейными коэффициентами и найдено ее аналитическое решение. Численно исследован случай, когда слой имеет фрактальное распределение плотности. Выделены характерные максимумы энергии отраженной волны. Приведены графики, иллюстрирующие зависимость отраженной энергии от самоподобных свойств фрактальной кривой.

Ключевые слова: дифракция, упругая волна, фрактальная интерполяция.

Abstract. The authors consider the diffraction of elastic wave on a layer with the fractal density. The problem is reduced to a system of ordinary differential equations with linear coefficients and its analytical decision is found. The researchers numerically investigate a layer with a fractal density, find peaks of energy of the reflected wave and illustrate dependence of reflected energy from self-similar properties of the fractal density.

Key words: diffraction, elastic wave, fractal interpolation.

Введение

В последние десятилетия идеи фрактальной геометрии и нелинейной динамики получили широкое распространение в различных областях естествознания. Не стали исключением геология и геофизика [1, 2]. Фрактальному характеру распределения неоднородностей литосферы и рассеянию сейсмических волн посвящена работа [3]. В работе [4] исследуются фрактальные свойства высокочастотного сейсмического шума и механизмы их генерации. Отметим также работу [5], посвященную численному решению краевых задач в области с фрактальной границей.

В данной работе рассмотрен частный случай задачи дифракции на слое, когда слой имеет фрактальное распределение плотности среды, а скорость упругой волны полагается постоянной. Подробнее физические основы и дополнительный математический аппарат задачи прохождения акустических волн через градиентные акустические барьеры изложены в [6].

1. Постановка задачи

Пусть на слой толщины L (среда 2 $\{0 < x < L\}$ с плотностью $\rho_2(x)$ и скоростью v_2) из среды 1 $\{x < 0\}$ падает упругая гармоническая волна, описываемая потенциальной функцией $u_0(x)e^{i\omega t}$, где $u_0(x) = A_0 e^{-ik_1 x}$, $k_1 = \omega / v_1$.

В результате дифракции отражается волна $u_1(x)$, а $u_3(x)$ проходит в третью среду $\{x > L\}$. Нужно найти полное дифрагированное поле. Геометрия задачи представлена на рис. 1

Для гармонических колебаний однородной и изотропной упругой среды перемещение удовлетворяет волновому уравнению

$$u''(x) + k^2 u(x) = 0, \quad (1)$$

где $k = \omega / v$ – волновое число среды; общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx},$$

при этом напряжение в среде имеет вид

$$\sigma(x) = i\omega\rho v(-Ae^{-ikx} + Be^{ikx}).$$

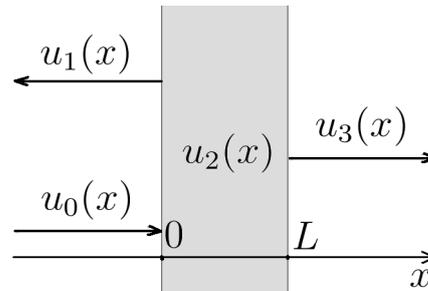


Рис. 1

Колебания среды в общем случае описываются в [7] уравнением

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad (2)$$

где напряжение связано с перемещением следующим соотношением:

$$\sigma(x) = \rho(x)v^2 u'(x).$$

Физический смысл величины $\rho(x)v^2$ – модуль упругости. Уравнение (2) для гармонических волн примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho(x)v^2 \frac{\partial u}{\partial x}) + \rho(x)\omega^2 u = 0.$$

Перемещения для отраженной и прошедшей волн $u_1(x)$ и $u_3(x)$ являются решениями (1). Будем искать их в виде $u_1(x) = B_1 e^{ik_1 x}$, $u_3(x) = A_3 e^{-ik_3(x-L)}$.

На границе раздела сред перемещение и напряжение должны быть непрерывны. Тогда при $x = 0$ получим

$$A_0 + B_1 = u_2(0), \quad (3)$$

$$i\omega\rho_1 v_1(-A_0 + B_1) = \rho_2(0)v_2^2 u_2'(0), \quad (4)$$

при $x = L$:

$$u_2(L) = A_3, \quad (5)$$

$$\rho_2(L)v_2^2 u_2'(L) = -i\omega\rho_3 v_3 A_3. \quad (6)$$

Таким образом, если исключим неизвестные B_1 и A_3 из уравнений (3)–(6), то решение задачи дифракции сводится к отысканию перемещения $u_2(x)$, удовлетворяющего уравнению

$$(\rho_2(x)v_2^2 u_2'(x))' + \rho_2(x)\omega^2 u_2(x) = 0 \quad (7)$$

с граничными условиями третьего рода

$$\begin{aligned} \rho_2(0)v_2^2 u_2'(0) - i\omega\rho_1 v_1 u_2(0) &= -i2\omega\rho_1 v_1 A_0, \\ \rho_2(L)v_2^2 u_2'(L) + i\omega\rho_2 v_3 u_2(L) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим случай, когда $v_1 = v_2 = v_3 = v$, $\rho_1 = \rho_3 = \rho$, а $\rho_2(x)$ является фрактальной интерполяционной функцией.

2. Сведение задачи дифракции к системе линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим вместо слоя ($0 < x < L$) совокупность N прилегающих вплотную друг к другу слоев. В каждом слое распределение плотности задано формулой $\rho_n(x) = k_n x + b_n$, а скорость является постоянной величиной v , причем $\rho_n(x)v^2$ является всюду непрерывной функцией. Волновое уравнение для каждого слоя примет вид

$$\left((k_n x + b_n) v_n^2 u_n'(x) \right)' + (k_n x + b_n) \omega^2 u(x) = 0, \quad x_{n-1} < x < x_n. \quad (9)$$

Сделаем замену $x = \frac{v}{\omega} z - \frac{b_n}{k_n}$ и рассмотрим функцию

$$y_n(z) = u_n \left(\frac{v}{\omega} z - \frac{b_n}{k_n} \right).$$

Уравнение (9) примет вид уравнения Бесселя:

$$zy_n''(z) + y_n'(z) + zy_n(z) = 0.$$

Знак z для каждого интервала (x_{n-1}, x_n) у полученного уравнения является постоянным и зависит от знака k_n . Объединим решения для положительных и отрицательных z . Тогда общее решение можно представить в виде

$$y_n(z) = A_n J_0(|z|) + B_n Y_0(|z|).$$

Таким образом, решение уравнения (9) будет иметь следующий вид:

$$u_n(x) = A_n J_0 \left(\left| \frac{\omega}{v} x + \frac{\omega b_n}{v k_n} \right| \right) + B_n Y_0 \left(\left| \frac{\omega}{v} x + \frac{\omega b_n}{v k_n} \right| \right). \quad (10)$$

На стыке слоев должны быть выполнены условия

$$u_n(x_n) = u_{n+1}(x_n), \quad u'_n(x_n) = u'_{n+1}(x_n), \quad n = 1, \dots, N-1,$$

что приводит к следующим уравнениям:

$$A_n J_0(|\xi_n|) + B_n Y_0(|\xi_n|) = A_{n+1} J_0(|\zeta_n|) + B_{n+1} Y_0(|\zeta_n|);$$

$$A_n J_1(|\xi_n|) + B_n Y_1(|\xi_n|) = \frac{\text{sign } \zeta_n}{\text{sign } \xi_n} (A_{n+1} J_1(|\zeta_n|) + B_{n+1} Y_1(|\zeta_n|)),$$

где

$$\xi_n = \frac{x_n k_n + b_n}{v k_n} \omega, \quad \zeta_{n-1} = \frac{x_{n-1} k_n + b_n}{v k_n} \omega, \quad n = 1, \dots, N.$$

На границах слоев с полуплоскостями имеют место условия

$$b_1 v u'(0) - i \omega \rho u(0) = -i 2 \omega \rho A_0,$$

$$(k_N L + b_N) v u'(L) + i \omega \rho u(L) = 0.$$

Эти условия устанавливают связь между коэффициентами

$$\begin{aligned} & A_1 [-b_1 \text{sign } \zeta_0 J_1(|\zeta_0|) - i \rho J_0(|\zeta_0|)] + \\ & + B_1 [-b_1 \text{sign } \zeta_0 Y_1(|\zeta_0|) - i \rho Y_0(|\zeta_0|)] = -i 2 \rho A_0; \\ & A_N [-(k_N L + b_N) \text{sign } \xi_N J_1(|\xi_N|) + i \rho J_0(|\xi_N|)] + \\ & + B_N [-(k_N L + b_N) \text{sign } \xi_N Y_1(|\xi_N|) + i \rho Y_0(|\xi_N|)] = 0. \end{aligned}$$

Полученные выше уравнения относительно коэффициентов A_n и B_n запишем в векторно-матричном виде:

$$\Omega \cdot c = f,$$

где $c = \{A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_N, B_N\}$ с правой частью $f = \{-i 2 A_0 \rho / b_1, 0, \dots, 0\}$.

Матрица Ω является пятидиагональной:

$$\left(\begin{array}{cccccc} \Omega_{11} & \Omega_{12} & 0 & 0 & & \\ J_0(|\xi_1|) & Y_0(|\xi_1|) & -J_0(|\zeta_1|) & -Y_0(|\zeta_1|) & 0 & \\ J_1(|\xi_1|) & Y_1(|\xi_1|) & s_1 J_1(|\zeta_1|) & s_1 Y_1(|\zeta_1|) & 0 & \\ 0 & 0 & J_0(|\xi_2|) & Y_0(|\xi_2|) & -J_0(|\zeta_2|) & -Y_0(|\zeta_2|) \\ 0 & 0 & J_1(|\xi_2|) & Y_1(|\xi_2|) & s_2 J_1(|\zeta_2|) & s_2 Y_1(|\zeta_2|) \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & J_0(|\xi_{N-1}|) & Y_0(|\xi_{N-1}|) & -J_0(|\zeta_{N-1}|) & -Y_0(|\zeta_{N-1}|) \\ & & & & 0 & J_1(|\xi_{N-1}|) & Y_1(|\xi_{N-1}|) & s_{N-1} J_1(|\zeta_{N-1}|) & s_{N-1} Y_1(|\zeta_{N-1}|) \\ & & & & & 0 & 0 & \Omega_{NN-1} & \Omega_{NN} \end{array} \right),$$

где $s_n = -\text{sign } \zeta_n / \text{sign } \xi_n$,

$$\Omega_{11} = -\text{sign } \zeta_0 J_1(|\zeta_0|) - i \frac{\rho}{b_1} J_0(|\zeta_0|);$$

$$\Omega_{12} = -\text{sign } \zeta_0 Y_1(|\zeta_0|) - i \frac{\rho}{b_1} Y_0(|\zeta_0|);$$

$$\Omega_{NN-1} = -\text{sign } \xi_N J_1(|\xi_N|) + i \frac{\rho}{k_N x_N + b_N} J_0(|\xi_N|);$$

$$\Omega_{NN} = -\text{sign } \xi_N Y_1(|\xi_N|) + i \frac{\rho}{k_N x_N + b_N} Y_0(|\xi_N|).$$

Полученную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) решим методом прогонки [8, с. 34].

3. Фрактальные интерполяционные функции

Известны два способа построения фрактальных интерполяционных функций. В работе [9, с. 207] такие функции определены, как аттракторы систем итерированных функций специального вида. В данной работе будем придерживаться более общего подхода, разработанного П. Массопустом [10, с. 182].

Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R}$ – непустой интервал, $1 < N \in \mathbb{N}$ и $\{(x_i, y_i) \in [a, b] \times \mathbb{R} \mid \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b\}$ – узлы интерполяции. Для каждого $i = 1, \dots, N$ рассмотрим аффинное преобразование плоскости:

$$A_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad A_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}.$$

Потребуем, чтобы для всех $i = 1, \dots, N$ были выполнены следующие два условия:

$$A_i(x_0, y_0) = (x_{i-1}, y_{i-1}), \quad A_i(x_N, y_N) = (x_i, y_i).$$

В этом случае

$$a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{b - a}, \quad c_i = \frac{y_i - y_{i-1} - \lambda_i(y_N - y_0)}{b - a},$$

$$\alpha_i = \frac{bx_i - ax_{i-1}}{b - a}, \quad \beta_i = \frac{by_{i-1} - ay_i - \lambda_i(by_0 - ay_N)}{b - a},$$

а $\lambda_i, i = 1, \dots, N$, рассматриваются как параметры.

Заметим, что при таком определении операторов A_i прямолинейный отрезок, соединяющий точки (x_0, y_0) и (x_N, y_N) , переходит в ломаную, последовательно соединяющую точки интерполяции.

Для каждого $i = 1, \dots, N$ обозначим

$$u_i : [a, b] \rightarrow [x_{i-1}, x_i], \quad u_i(x) = a_i x + \alpha_i,$$

$$p_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_i(x) = c_i x + \beta_i,$$

$$p(x) = \sum_{i=1}^N (p_i \circ u_i^{-1})(x) \chi_{[x_{i-1}, x_i]}(x),$$

где χ_S – характеристическая функция множества S . В работе [10] показано, что функциональный оператор T , действующий по правилу

$$(Tg)(x) = p(x) + \sum_{i=1}^N \lambda_i (g \circ u_i^{-1})(x) \chi_{[x_{i-1}, x_i]}(x),$$

переводит непрерывные функции в непрерывные. Более того, если $|\lambda_i| < 1$ для всех $i = 1, \dots, N$, то оператор T является сжатием на банаховом пространстве $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ с коэффициентом сжатия $\lambda = \max\{|\lambda_i|, i = 1, \dots, N\}$.

По теореме о неподвижной точке сжимающего отображения существует единственная функция $f \in C[a, b]$ такая, что $Tf = f$. Более того, для любой $f \in C[a, b]$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n(f) - f\|_\infty = 0.$$

Функцию f будем называть фрактальной интерполяционной функцией. Легко заметить, что если $f \in C[a, b]$, $f(x_0) = y_0$ и $f(x_N) = y_N$, то $T(f)$ проходит через точки интерполяции. В этом случае функции $T^n(f)$ будем называть предфрактальными интерполяционными функциями порядка n или предфракталами n -го порядка.

На рис. 2 показана фрактальная интерполяционная функция, построенная по точкам интерполяции $(0, 1000)$, $(50, 1500)$ и $(100, 1000)$ при значениях параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$.

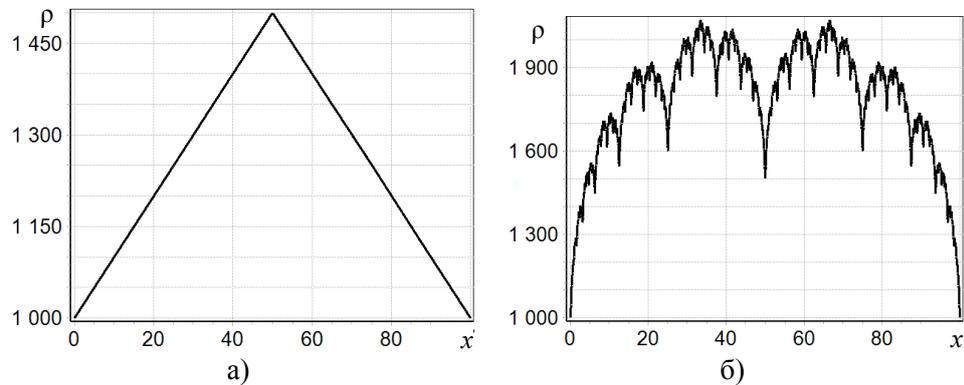


Рис. 2. Графики предфракталов: а – предфрактал первого порядка; б – предфрактал девятого порядка

4. Численные результаты

Рассмотрим дифференциальное уравнение (7) с граничными условиями (8). Исследуем зависимость величины нормированной отраженной энергии от плотности $\rho(x)$ и частоты ω . Иными словами, если $\rho: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}_+$ – плотность в слое, то будем искать функцию $E\rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$, $E\rho(\omega) = B_1^2(\omega) / A_0^2$, где $B_1(\omega)$ и A_0 – амплитуды отраженной и падающей волн.

Пусть ширина слоя $L=100$ и ρ – фрактальная интерполяционная функция, построенная по точкам интерполяции $(0,1000)$, $(50,1500)$ и $(100,1000)$ при значениях параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$. Обозначим $\rho^0 \equiv 1000$, ρ^n – предфрактальные интерполяционные функции порядка n . Заметим, что ρ^n является непрерывной кусочно-линейной функцией, состоящей из 2^n прямолинейных отрезков, проходящих через точки (x_i^n, y_i^n) , $i = 0, \dots, 2^n$. Из построения следует, что $x_i^n = 100 \cdot i \cdot 2^{-n}$. Кроме того, множество точек излома $A^n = \{(x_i^n, y_i^n)\}_{i=0}^{2^n}$ является подмножеством A^{n+1} .

Если сравним графики функций $E\rho^8$ и $E\rho^9$ (рис. 3), то можно сделать следующие выводы.

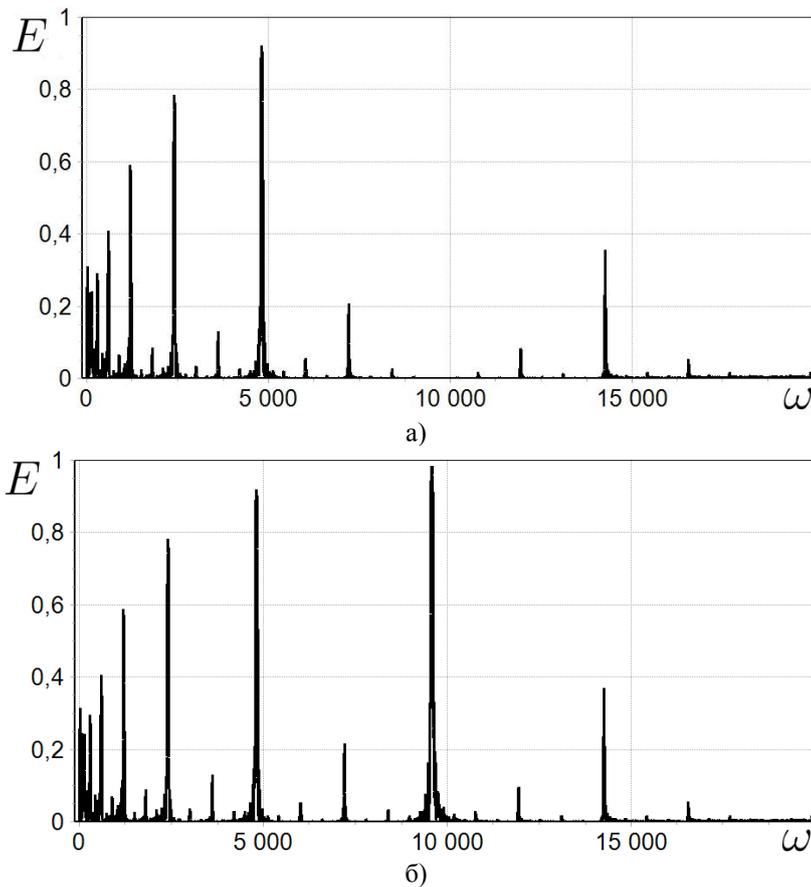


Рис. 3. Графики функций $E\rho^8$ (а) и $E\rho^9$ (б); ρ^n – предфрактальные интерполяционные кривые, построенные по точкам интерполяции $(0, 1000)$, $(50, 1500)$ и $(100, 1000)$ при значениях параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,7$

Во-первых, графики практически идентичны, за исключением наблюдаемого у $E\rho^9$ максимума на частотах, близких к 9700. Этот эффект вызван

тем, что график ρ^9 получен из ρ^8 заменой каждого прямолинейного отрезка на ломаную, состоящую из двух звеньев. Во-вторых, функции $E\rho^n$ наследуют самоподобные свойства функции ρ^n в том смысле, что пики функции $E\rho^n$ расположены в точках $C \cdot 2^k$, где C – некоторая константа, $k = \overline{1, n}$. Это вызвано тем, что отношение длин отрезков (x_i^n, x_{i+1}^n) и $(x_j^{n+1}, x_{j+1}^{n+1})$ равно 2. В-третьих, наличие четко выраженных пиков у функции $E\rho^n$ обусловлено тем, что проекции на ось X всех прямолинейных отрезков, из которых состоит график ρ^n , имеют одинаковую длину, равную $100 \cdot 2^{-n}$. Иными словами, $x_{i+1}^n - x_i^n = 100 \cdot 2^{-n}$ для любого $i = 0, \dots, 2^n - 1$.

Для проверки последнего заключения сместим среднюю точку интерполяции на единицу вправо по оси X . Пусть теперь ρ – фрактальная интерполяционная функция, построенная по другим точкам интерполяции $(0, 1000)$, $(51, 1500)$ и $(100, 1000)$ при значениях параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,7$. Как и в предыдущем случае, предфракталы ρ^n являются непрерывными кусочно-линейными функциями, и состоят из 2^n прямолинейных отрезков, проходящих через точки (x_i^n, y_i^n) , $i = 0, \dots, 2^n$. Однако $x_i^n \neq 100 \cdot i \cdot 2^{-n}$. Несложно проверить, что количество отрезков длины $x_{i+1}^n - x_i^n$ распределено по биномиальному закону, т.е. для любого $k = 0, \dots, n$ имеется ровно C_n^k интервалов длины $100 \cdot 0.51^k \cdot 0.49^{n-k}$. Сравнение рис. 3 и 4 наглядно иллюстрирует то, что наличие четко выраженных пиков функции $E\rho^n$ прямо зависит от разбиения отрезка $[0, 100]$ точками x_i^n .

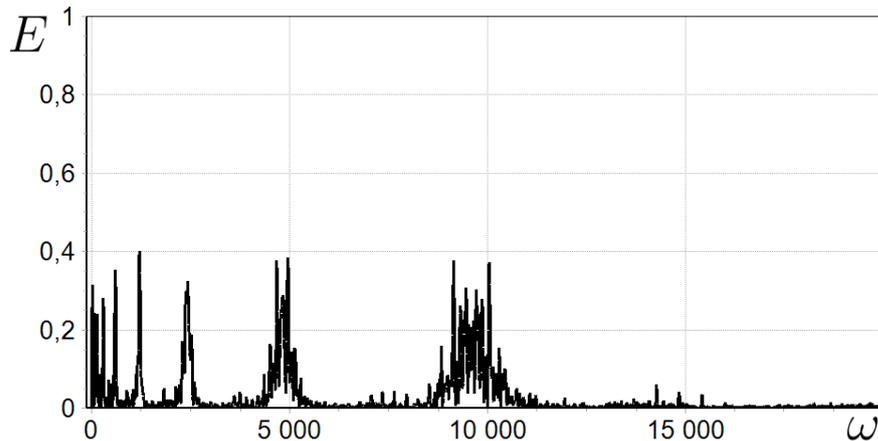


Рис. 4. График функции $E\rho^9$; ρ^9 – предфрактал, построенный по точкам интерполяции $(0, 1000)$, $(51, 1500)$ и $(100, 1000)$ при значениях параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,7$

Интересные результаты представлены на рис. 5.

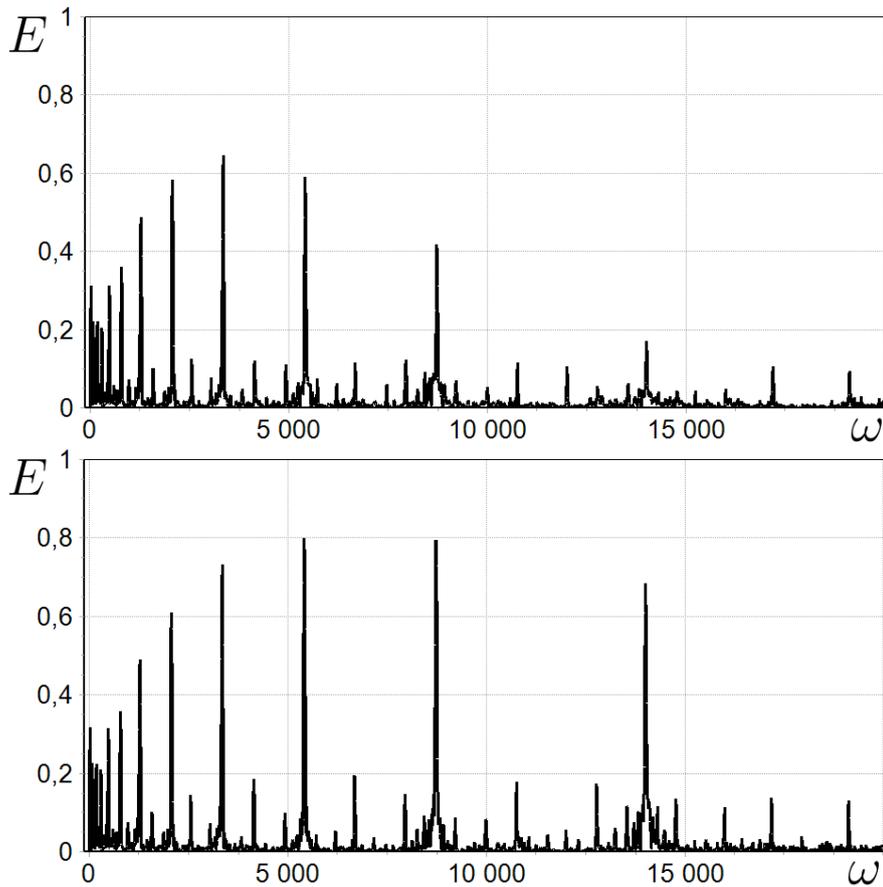


Рис. 5. Графики функций $E\rho^8$ и $E\rho^9$; ρ^n – предфракталы, построенные по точкам интерполяции $(0, 1000)$, $(61.8, 1500)$ и $(100, 1000)$ при значениях параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,7$

Выбор второй точки интерполяции $(61.8, 1500)$ неслучаен. Обозначим через $\alpha \approx 0,618$ золотое сечение, т.е. наименьший корень уравнения $x^2 = 1 - x$. Среди интервалов $x_{i+1}^n - x_i^n$ имеется C_n^k интервалов длины $100\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}$. Так как $\alpha^2 = 1 - \alpha$, то получим, что среди интервалов $(n+1)$ -го уровня $x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}$ есть интервалы, длины которых в точности равны длинам интервалов n -го уровня. Таким образом, пики, соответствующие различным предфракталам, наслаиваются друг на друга.

Заключение

Таким образом, в случае, когда ρ^n является предфрактальной интерполяционной функцией, можно сделать следующие выводы.

Четкие всплески отраженной энергии проявляются только у таких фракталов, у которых проекции на ось X прямолинейных отрезков, из

которых состоит график $\rho(x)$, имеют одинаковую длину. При этом если увеличивается количество отрезков с равной длиной, то увеличивается и значение отраженной энергии. К таким самоподобным структурам можно отнести предфракталы, получаемые из предфрактала меньшей размерности делением отрезков на равные части или делением отрезков в пропорции золотого сечения.

Если фрактал построен по принципу деления на равные части, то увеличение порядка предфрактала не изменяет расположение пиков отраженной энергии, а добавляет лишь новые при более высоких частотах.

В случае, когда фрактал построен делением отрезков в пропорции золотого сечения, то увеличение порядка предфрактала приводит к росту высоты пиков отраженной энергии и добавлению новых при более высоких частотах.

Список литературы

1. **Slawinski, M. A.** Seismic Waves and Rays in Elastic Media / M. A. Slawinski. – Amsterdam : Pergamon, 2003. – 402 p.
2. **Turcotte, D. L.** Fractals and chaos in geology and geophysics / D. L. Turcotte. – N. Y. : Cambridge University Press, 1997. – 398 p.
3. **Файзуллин, И. С.** Рассеяние сейсмических волн и фрактальный характер неоднородностей литосферы / И. С. Файзуллин, С. А. Шапиро // Физика Земли. – 1989. – № 10. – С. 43–49.
4. **Мухамедов, В. А.** О фрактальных свойствах высокочастотного сейсмического шума и механизмах его генерации / В. А. Мухамедов // Физика Земли. – 1992. – № 3. – С. 39–49.
5. **Бойков, И. В.** Численное решение краевых задач для линейных и квазилинейных уравнений эллиптического типа в области с фрактальной границей / И. В. Бойков, Т. В. Елисеева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 3. – С. 14–21.
6. **Шварцбург, А. Б.** Градиентные акустические барьеры (точно решаемые барьеры) / А. Б. Шварцбург, Н. С. Ерохин // Успехи физических наук. – 2011. – Т. 181, № 6. – С. 627–646.
7. **Ерофеев, В. И.** Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность / В. И. Ерофеев, В. В. Кажаяев, Н. П. Семерикова. – М. : Физматлит, 2002. – 208 с.
8. **Ильин, В. П.** Численные методы решения задач строительной механики / В. П. Ильин, В. В. Карпов, А. М. Масленников. – Мн. : Выш. шк., 1990. – 349 с.
9. **Barnsley, M. F.** Fractals everywhere / M. F. Barnsley. – Boston : Academic Press Inc., 1988. – 396 p.
10. **Massopust, P.** Interpolation and approximation with splines and fractals / P. Massopust. – Oxford : Oxford University Press, 2010. – 319 p.

Ануфриева Анастасия Вадимовна
студентка, Институт вычислительной
математики и информационных
технологий, Казанский (Приволжский)
федеральный университет

E-mail: nastya-anufrieva@mail.ru

Anufrieva Anastasiya Vadimovna
Student, Institute of Computer Science
and Information Technology,
Kazan Federal University

Игудесман Константин Борисович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра геометрии, Институт
математики и механики, Казанский
(Приволжский) федеральный
университет

E-mail: KIgudesm@yandex.ru

Igudesman Konstantin Borisovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, sub-department
of geometry, Institute of Mathematics
and Mechanics, Kazan Federal University

Тумаков Дмитрий Николаевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра прикладной математики,
Институт вычислительной математики
и информационных технологий,
Казанский (Приволжский)
федеральный университет

E-mail: dtumakov@ksu.ru

Tumakov Dmitry Nikolaevich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, sub-department
of applied mathematics, Institute
of Computer Science and Information
Technology, Kazan Federal University

УДК 519.6, 534.26

Ануфриева, А. В.

Дифракция упругой волны на слое с фрактальным распределением плотности / А. В. Ануфриева, К. Б. Игудесман, Д. Н. Тумаков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 3 (23). – С. 73–83.